Corrigé du partiel

A. Questions de cours (5 points)

1) On a $2I_O = I_{(Ox)} + I_{(Oy)} + I_{(Oz)}$ et par symétrie $I_{(Ox)} = I_{(Oy)} = I_{(Oz)}$ donc $2I_O = 3I_\Delta$.

2) $E_{c/\mathcal{R}} = E_c^* + \frac{1}{2}mv_G^2$: l'énergie cinétique d'un solide dans le référentiel $\mathcal{R}$ est la somme de son énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse E_c^* et de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}$ du point G affecté de la masse totale... on peut accepter des expressions du genre $E_c^* = \frac{1}{2}I\omega^2$ suivant ce qu'ils ont vu en cours...

B. Problème (15 points)

Étude cinématique d'un mouvement

1)
- Le cylindre est en rotation uniforme autour de (Oz) à la vitesse $\vec{\omega} = \dot{\alpha}\vec{e}_z$:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = b\dot{\alpha}\vec{e}_\theta$$

- Le point A décrit un arc de cercle de rayon $b - a$ à la vitesse $\dot{\theta}\vec{e}_z$ donc $\vec{v}_A = (b-a)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
- Pour le point Q, on applique la formule des vitesses dans un solide (ici la bille) :

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_A + \overrightarrow{QA} \wedge \vec{\omega}_{(\mathcal{B})} = [(b-a)\dot{\theta} + a\dot{\varphi}]\vec{e}_\theta$$

2) Vitesse de glissement : $\vec{v}_g = \vec{v}_Q - \vec{v}_P$. Roulement sans glissement $\Leftrightarrow$ $v_g = 0$ donc

$$(b-a)\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = b\dot{\alpha}$$

3) On peut utiliser la formule de la question de cours ou faire un calcul direct. On doit trouver $I_{(Az)} = (2/5)ma^2$. Je ne vous fais pas la démo...

4)
a) Dans le référentiel du centre de masse, la bille a un mouvement de rotation pure autour de (Az) à la vitesse $\dot{\varphi}\vec{e}_z$ donc $\vec{L}^* = I_{(Az)}\dot{\varphi}\vec{e}_z$.

b) On applique le théorème de Koenig pour le moment cinétique :

$$\vec{L}_\mathcal{R} = \vec{L}^* + \overrightarrow{OA} \wedge (m\vec{v}_{A/\mathcal{R}}) = [\frac{2}{5}ma^2\,\dot{\varphi} + m(b-a)^2\,\dot{\theta}]\vec{e}_z$$

c) On applique aussi le théorème de Koenig sachant que $E_c^* = (1/2)I_{(Az)}\omega_{(\mathcal{B})}^2$ et on obtient

$$E_c = \frac{1}{5}ma^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(b-a)^2\,\dot{\theta}^2$$